Introduzione alla meccanica delle strutture
D. Bernardini

Prova di autovalutazione n. 3

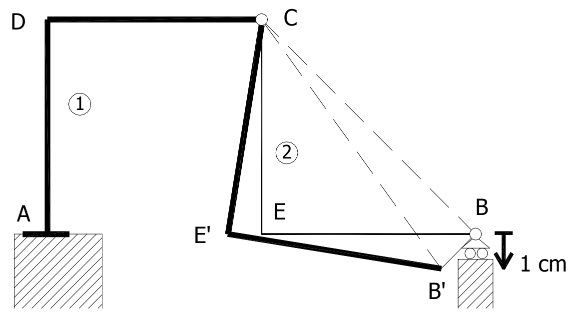
Soluzione sintetica

ESERCIZIO 1

1. La struttura è potenzialmente isostatica (n_{gdl}= 2·3 = 6, n_v= 3+2+1 = 6). Cerchiamo una soluzione con il *metodo grafico*.
Centri di rotazione. In A c'è un incastro: il corpo 1 rimane fermo. Siccome il punto C rimane fermo, è centro di rotazione per il corpo 2 (CR_2=C). *Angoli di rotazione.* ϑ_1=0 perché c'è un incastro. Il punto B si sposta ortogonalmente alla retta che lo unisce con CR_2 e quindi $|\mathbf{u}(B)|=0.01 \cdot \sqrt{2} =$ 0.0141 m. Si ha d = $8 \cdot \sqrt{2}$ m =11.312 m quindi

$$|\vartheta_2| = \frac{0.01 \cdot \sqrt{2}}{8 \cdot \sqrt{2}} = 0.00125\, rad = 0.07°$$

Dal disegno si vede che la rotazione è oraria, quindi $\vartheta_2 = -0.00125\, rad$



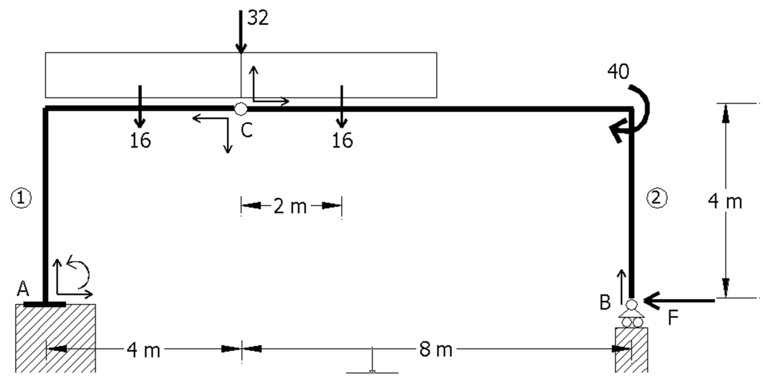
2. Spostamento dei punti notevoli:

u(A) = u(D) = u(C) = 0	v(A) = v(D) = v(C) = 0	
u(E) = -(-8) ϑ_2 = *-0.01 m*	v(E) = 0	$|\mathbf{u}(E)|$ = 1 cm
u(B) = -(-8) ϑ_2 = *-0.01 m*	v(B) = (8) ϑ_2 = *-0.01 m*	$|\mathbf{u}(B)|$ = 1.41 cm

3. $\Delta\vartheta = \vartheta_2 - \vartheta_1$ =*-0.00125 rad.* Un osservatore solidale con il corpo 1 vede il corpo 2 ruotare di *0.00125 rad* in senso orario.

ESERCIZIO 2

1. La struttura è potenzialmente isostatica (n_{gdl}=2 · 3 = 6, n_v=2+ 2+2 = 6). Per classificare la struttura si cercano i centri di rotazione con il metodo grafico in assenza di cedimenti. Il corpo 1 rimane fermo per la presenza dell'incastro, deve quindi essere CR_2 = C. Tuttavia per la presenza del carrello, CR_2 dovrebbe appartenere alla retta verticale per B, si ottiene una contraddizione quindi i vincoli sono ben posti e la struttura è effettivamente isostatica.



2. *Calcolo reazioni vincolari*.

$$\Sigma M_C^{(2)} = 8Y_B - 4F - 40 - 16 \cdot 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_B = 9 + \frac{F}{2}$$

$$\Sigma Y^{tutto} = Y_A + Y_B - 32 = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_A = 23 - \frac{F}{2}$$

$$\Sigma Y^{(1)} = Y_A - Y_C - 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_C = 7 - \frac{F}{2}$$

$$\Sigma X^{(2)} = X_C - F = 0 \quad \Rightarrow \quad X_C = F$$

$$\Sigma X^{tutto} = X_A - F = 0 \quad \Rightarrow \quad X_A = F$$

$$\Sigma M_A^{tutto} = M_A + 12Y_B - 32 \cdot 4 - 40 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_A = 60 - 6F$$

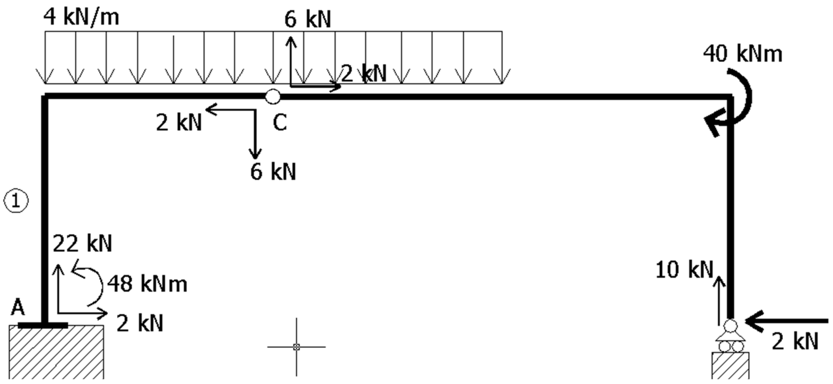
Controllo.

$$\Sigma M_C^{tutto} = X_A \cdot 4 - Y_A \cdot 4 + M_A + Y_B \cdot 8 - 4F - 40 =$$

$$= 4F - \left(23 - \frac{F}{2}\right) \cdot 4 + 60 - 6F + \left(9 + \frac{F}{2}\right) \cdot 8 - 4F - 40 =$$
$$= 4F - 92 + 2F + 60 - 6F + 72 + 4F - 4F - 40 = 0$$

Per rappresentare le reazioni scegliamo un valore per F, ad esempio F = 2 kN.

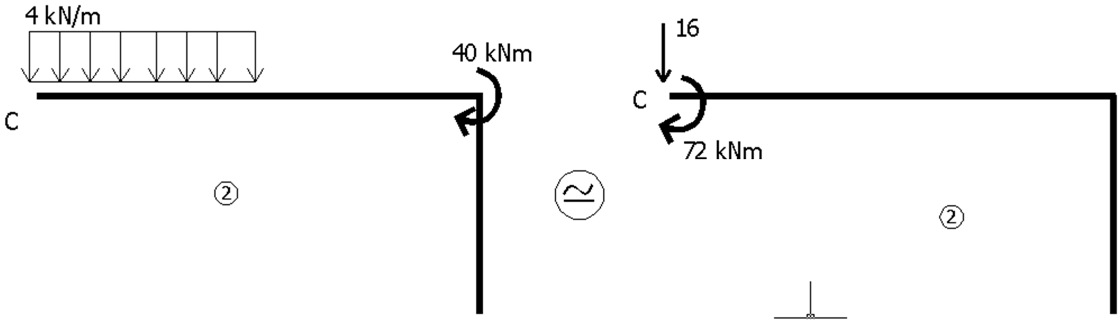
$$X_A = 2\,kN \qquad Y_A = 22\,kN \qquad M_A = 48\,kNm \qquad Y_B = 10\,kN \qquad X_C = 2\,kN \qquad Y_C = 6\,kN$$



3. Al crescere di F, la reazione M_A diminuisce secondo la $M_A = 60 - 6F$ (ad esempio, vale 60 per F=0 e 48 per F=2). In particolare, si annulla per $F = 10\,kN$.

4. Scegliendo C come punto di riferimento, i carichi agenti sul corpo 2 sono equivalenti al seguente sistema di forze essenziale applicato in C

$\Sigma X^{(2),car} = 0$
$\Sigma Y^{(2),car} = -16\,kN$
$\Sigma M^{(2),car} = -16 \cdot 2 - 40 = -72\,kNm$



I p.f. dei carichi applicati sul corpo 2 sono $(0, -16, -72)$.

ESERCIZIO 3

1. La struttura è una trave appoggiata. L'asse di scorrimento del carrello non passa per la cerniera. La struttura è isostatica.

Calcolo reazioni vincolari esterne.

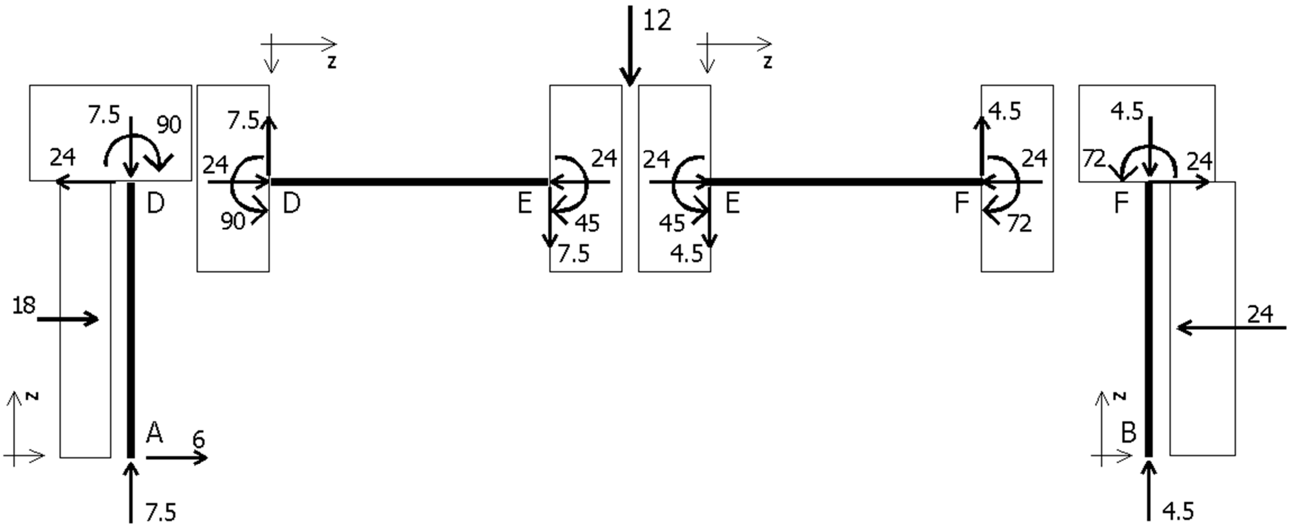
$\Sigma M_A^{tutto} = 12 Y_B - 18 \cdot 3 + 24 \cdot 3 - 12 \cdot 6 = 0 \qquad \Rightarrow \quad Y_B = \dfrac{54}{12} = 4.5\,kN$
$\Sigma X^{tutto} = 0 \qquad \Rightarrow \quad X_A = 6\,kN$
$\Sigma Y^{tutto} = 0 \qquad \Rightarrow \quad Y_A = 7.5\,kN$

Diagramma di corpo libero.
La struttura è composta da 4 tratti omogenei.

Introduzione alla meccanica delle strutture

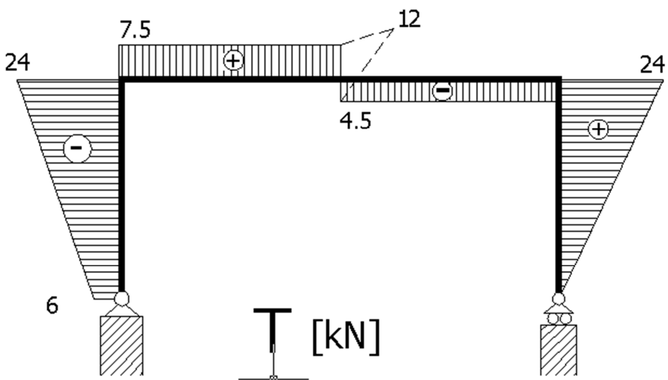
D. Bernardini

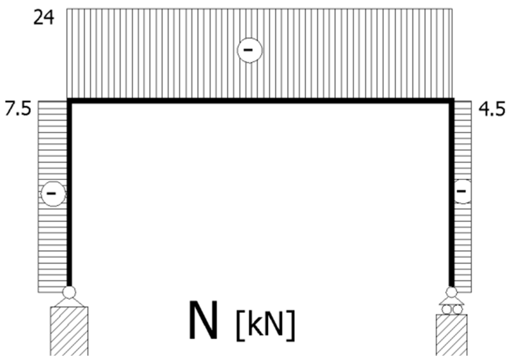
Prova di autovalutazione n. 3

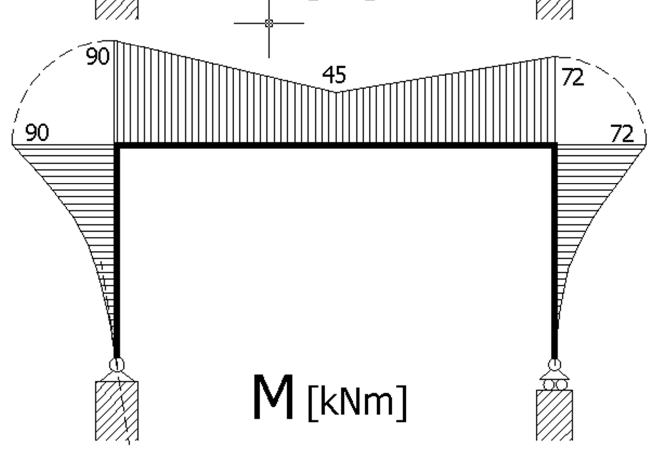


Equazioni e diagrammi delle sollecitazioni

tratto	N(z)	T(z)	M(z)
AD	*-7.5*	*-6-3z*	*$-6z-1.5z^2$*
DE	*-24*	*7.5*	*-90+7.5z*
EF	*-24*	*-4.5*	*-45-4.5z*
BF	*-4.5*	*4z*	*$2z^2$*







2. La sezione C appartiene al tratto DE ed è identificata da z=3. Lo sforzo normale è costante nel tratto, quindi N(C)=N(3)=-24 kN. Il momento flettente vale invece M(C)=M(3)=-90+7.5·3 = -67.5 kNm.

3. *Dimensionamento.* Acciaio S355, $f_{yd}=(355/1.05)\cdot 10^3 = 338.01\cdot 10^3$ kPa.

Tratti verticali.

$|N_{max}|$= 7.5 kN — $|M_{max}|$= 90 kNm

$A \geq (7.5/338.01\cdot 10^3)\cdot 10^4 = 0.22\ cm^2$ — $W \geq (90/338.01\cdot 10^3)\cdot 10^6 = 266.2\ cm^3$

Tratti orizzontali

$|N_{max}|$= 24 kN — $|M_{max}|$= 90 kNm

$A \geq (24/338.01\cdot 10^3)\cdot 10^4 = 0.71\ cm^2$ — $W \geq (90/338.01\cdot 10^3)\cdot 10^6 = 266.2\ cm^3$

Si sceglie un profilato HEA180 ($A=45.3\ cm^2$,$W=294\ cm^3$) per i tratti verticali ed un profilato IPE 240 ($A=39.1\ cm^2$,$W=324\ cm^3$) per i tratti orizzontali.

Introduzione alla meccanica delle strutture
D. Bernardini

Prova di autovalutazione n. 3

ESERCIZIO 4

Bisogna calcolare *v(B)=v(6)*.
Siccome la struttura è isostatica, si può determinare $\mathrm{M}(\mathrm{z}) = 32 - 6\mathrm{F} + \mathrm{F}z$ direttamente con le equazioni di equilibrio.
Noto M(z), si calcola la curvatura con il legame costitutivo

$$\chi(\mathrm{z}) = \frac{\mathrm{M}(\mathrm{z})}{\mathrm{EI}} = \frac{1}{EI}(32 - 6\mathrm{F} + \mathrm{F}z)$$

E quindi la rotazione e la freccia con le equazioni di congruenza (trave di Eulero-Bernouilli)

$$\varphi(z) = 0 + \int_0^z \chi(z)dz = \frac{1}{EI}\int_0^z (32 - 6\mathrm{F} + \mathrm{F}z)dz = \frac{1}{EI}\left[(32 - 6\mathrm{F})\mathrm{z} + \mathrm{F}\frac{z^2}{2}\right]$$

$$v(z) = 0 - \int_0^z \varphi(z)dz = \frac{1}{EI}\left[(-32 + 6\mathrm{F})\frac{z^2}{2} - \mathrm{F}\frac{z^3}{6}\right]$$

e quindi

$$\mathrm{v}(\mathrm{B}) = \mathrm{v}(6) = \frac{1}{\mathrm{EI}}(-576 + 72\mathrm{F})$$

si ha $\mathrm{v}(6) = 0$ se

$$\mathrm{F} = \frac{576}{72} = 8\ \mathrm{kN}$$

E' istruttivo calcolare lo spostamento della sezione B per altri valori della F (IPE 240 : EI = $2.1 \cdot 10^8 \cdot 3892 \cdot 10^{-8} = 8173.2\ \mathrm{kNm}^2$)

Se F=0 la sezione B si alza di

$$\mathrm{v}(6) = -\frac{576}{\mathrm{EI}} = -\frac{573}{8173.2}100 = -7.05\ \mathrm{cm}$$

Se F=6 kN la sezione B si alza di

$$\mathrm{v}(6) = -\frac{144}{\mathrm{EI}} = -\frac{144}{8173.2}100 = -1.76\ \mathrm{cm}$$

Se F=12 kN la sezione B si abbassa di

$$\mathrm{v}(6) = \frac{288}{\mathrm{EI}} = \frac{288}{8173.2}100 = 3.52\ \mathrm{cm}$$